Lycée secondaire Bennane-Bodheur	**EXAMEN BAC BLANC**	*Coefficient: 3* *Durée: 3 heures*
Mr : Bouhouch Ameur	*4ème SC*	*Mr : Ben Naser Mehdi*

Exercice n°1: (3 pts)

Répondre par "Vrai" ou "Faux" à chacune des questions suivantes en justifiant votre réponse:

1) Si f est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$
   Alors f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \lambda$.
2) La note en math d'un élève est une variable aléatoire Y qui suit la loi uniforme sur $[0,20]$. Alors la probabilité que cet élève aura une note en math supérieur à 16 est égale à 0,4.
3) Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ telle que $P(X > t) = P(X \le t)$ alors $t = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

Exercice n°2: (4 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A (1,1,0); B(1,-1,0) ; C (0,-1,0) et $D(1+\cos(\theta),-1,\sin(\theta))$; $\theta \in [0,\pi[$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que: $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$
   a) Montrer que S est une sphère de centre B et de rayon 1.
   b) Vérifier que C et D sont deux points de S.
   c) Pour quelle valeur de θ, [CD] est un diamètre de S.
3) Soit le plan Q : $2x-y+z-1=0$.
   a) Montrer que (AC) est incluse dans Q.
   b) Montrer que Q coupe S suivant un cercle ($\mathscr{C}$) dont on précisera le centre et le rayon.
4) Soit le plan $P_\theta : (\cos\theta)x+(\sin\theta)z-\cos(\theta)-1=0$.
   a) Montrer que la droite (AB) est parallèle à P_θ.
   b) Montrer que P_θ est tangent à S en D.

Exercice n°3: (3 pts)

On effectue une recherche sur la vitesse de propagation de l'influx nerveux dans une fibre nerveuse. On désigne par D le diamètre en microns de fibre nerveuse et par V la vitesse en mètre par seconde de l'influx nerveux dans la fibre de diamètre D. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous:

D	2.3	3	3.6	4.3	5	5.7	6.7	6.8	8	8.8	9.7	11	12.4	13.4	14.3	14.7
V	16	12	18	28	28	38	30	44	50	54	54	72	56	76	72	76

1) Calculer, à 10^{-2} près, le coefficient de corrélation linéaire de la série (D,V).Interpréter le résultat obtenu.
2) Donner une équation de la droite de régression de V en D.
3) Dans les mêmes conditions de l'expérience précédente, Estimer le diamètre d'une fibre nerveuse à travers laquelle l'influx nerveux se propagerait à la vitesse de 100m/s.
4) Estimer la vitesse de l'influx nerveux à travers une fibre nerveuse de diamètre 18 microns.

Voir suite au verso

Exercice n°4: **(4.5pts)**

Le directeur du personnel d'une entreprise constate que, chaque hiver, un nombre important d'employés s'absentent, malades de la grippe. Le médecin de l'entreprise lui assure qu'une personne non vaccinée contre la grippe a 40 % de chances d'attraper la maladie alors qu'une personne vaccinée n'a que 5 % de chances de tomber malade.

Le directeur décide donc de proposer au personnel une vaccination gratuite.

1) On choisit un employé au hasard et on considère les événements suivants :
   V :" l'employé s'est fait vacciner" et G : "l'employé contractera la grippe durant l'hiver".
   a) Déterminer les probabilités suivantes : $P(G/V)$ et $P(G/\overline{V})$.
   b) Prouver, alors, que $P(G) = 0.4 - 0.35P(V)$.
2) Déterminer le pourcentage minimum de personnes à vacciner pour que moins de 20% des employés aient la grippe cet hiver.
3) Finalement 80 % du personnel accepte de se faire vacciner.
   a) Montrer que la probabilité p_1 qu'un employé, pris au hasard, tombe malade cet hiver est égale à 0.12 ?
   b) Ali, employé de cette entreprise, tombe malade de la grippe. Quelle est la probabilité p_2 qu'il soit vacciné ?
4) L'entreprise comporte 500 personnes. On considère que le fait pour une personne de tomber malade est indépendant du fait que d'autres personnes le soient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades.
   a) Donner la loi de probabilité de X ?
   b) Quel est le nombre moyen de personnes qui tomberont malades de la grippe cet hiver ?
   c) Pour assurer le bon fonctionnement de l'entreprise le chef du personnel envisage l'embauche de 10 intérimaires. Que pensez-vous de cette décision, sachant qu'avec plus de 50 personnes malades l'entreprise ne fonctionne plus.

Exercice n°5: **(5.5 pts)**

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(x)$.

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha>0$ et que $1.7<\alpha<1.8$.
   b) Vérifier que $\ln(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$
3) Donner le signe de g sur $]0,+\infty[$.

B) Soit les équations différentielles (E) : $y'+y=\dfrac{e^{2-x}}{x}$ et (E_0) : $y'+y=0$

1) Déterminer la solution générale de (E_0).
2) Vérifier que la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=e^{2-x}.\ln(x)$ est une solution de (E).
3) Soit h une fonction définie sur $]0,+\infty[$.
   a) Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $(h-f)$ est solution de (E_0).
   b) Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation (E).

C) Dans cette partie, on va étudier f et tracer sa courbe représentative **(C)** dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.Interpréter graphiquement ce résultat.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3) a) Montrer que $f'(x)=e^{2-x}\,g(x)$ pour tout $x\in\,]0,+\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
4) Vérifier que $\ln(f(\alpha))=2-\alpha-\ln(\alpha)$.

5) On a tracé dans la figure de la page annexe la courbe (Γ) de la fonction logarithme népérien et on a placé sur l'axe des abscisses le réel α .

a) En utilisant la courbe (Γ), Placer sur l'axe des ordonnées le réel $\ln(\alpha)$ puis le réel $2-\alpha-\ln(\alpha)$.

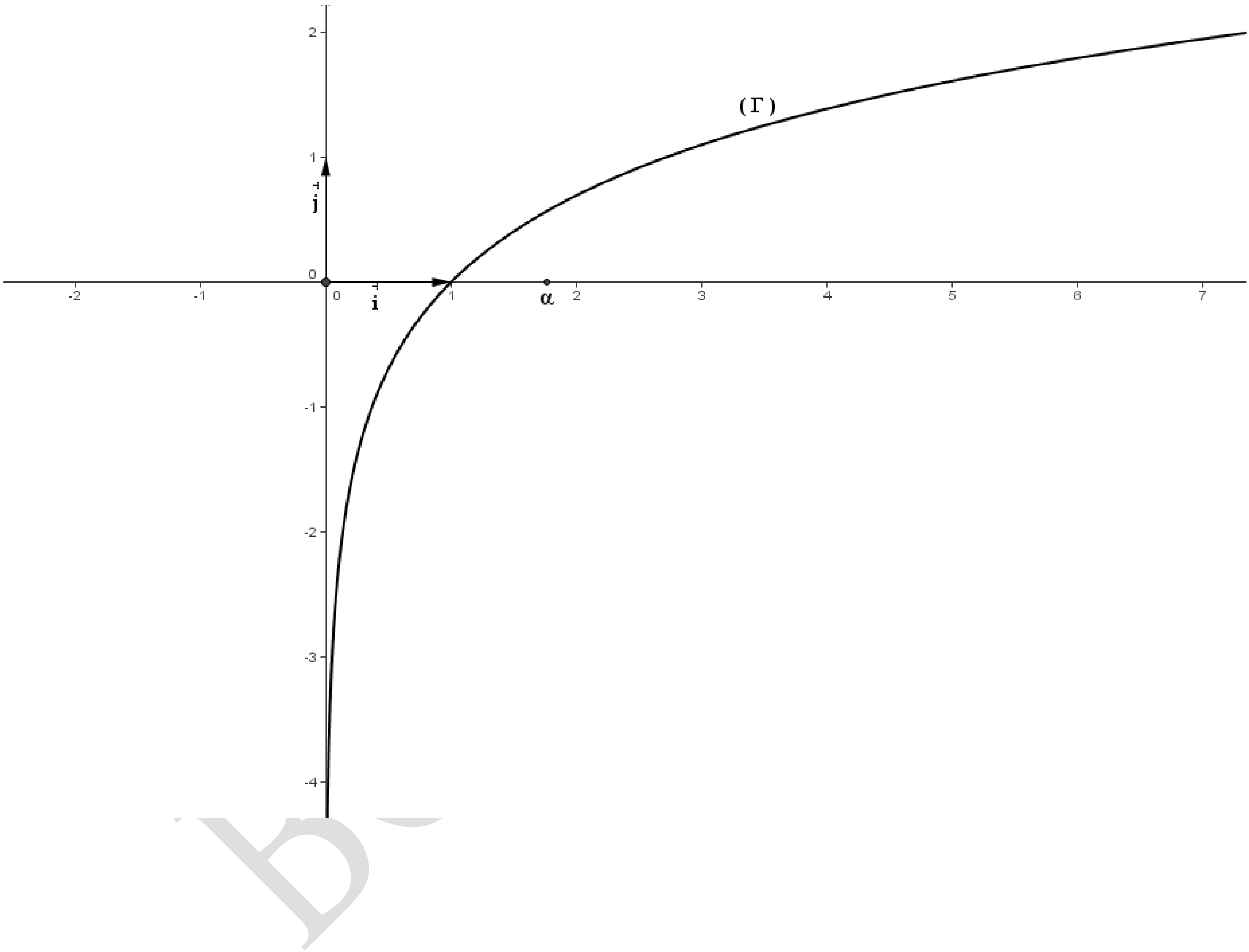
b) En utilisant encore la courbe (Γ), Placer sur l'axe des abscisses puis sur l'axe des ordonnées le réel $f(\alpha)$.

c) Construire, alors, le point $A(\alpha, f(\alpha))$ puis tracer la courbe **(C)**.

BON TRAVAIL

Page annexe à compléter et à rendre avec votre copie

Nom: **Prénom:**



Exercice n°1: **(correction)**

Répondre par "Vrai" ou "Faux" à chacune des questions suivantes en justifiant votre réponse:

1) **Vrai**

En effet : on a $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{-\lambda x}}{x}=\lim\limits_{X\to 0^-}-\lambda\dfrac{1-e^{X}}{X}=-\lambda\times(-1)=\lambda$ donc $f'_d(0)=\lambda$.

2) **Faux**

En effet : $P(Y>16)=\dfrac{20-16}{20-0}=\dfrac{4}{20}=0.2$

3) **Vrai**

En effet: $P(X>t)=P(X\leq t)\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t}\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \lambda t=\ln(2)\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln(2)}{\lambda}$ alors $t=\dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

Exercice n°2: **(Correction)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A (1,1,0); B(1,-1,0) ; C (0,-1,0) et $D(1+\cos(\theta),-1,\sin(\theta))$; $\theta\in[0,\pi[$

1) On a : $AB=\sqrt{(1-1)^2+(-1-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4}=2$, $AC=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

Et $BC=\sqrt{(0-1)^2+(-1+1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1}=1$.Donc $AB^2+BC^2=AC^2$ par suite ABC est rectangle en B.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que: $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$

a) On a: $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+2y+z^2+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+z^2+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1>0$.Donc S est une sphère de centre B (1,-1,0) et de rayon $R=1$.

b) * C (0,-1,0) , on a $0^2+(-1)^2+0^2-2\times 0+2\times(-1)+1=1-2+1=0$ donc $C\in S$.

* $D(1+\cos(\theta),-1,\sin(\theta))$, on a $(1+\cos(\theta))^2+(-1)^2+\sin^2(\theta)-2(1+\cos(\theta))+2\times(-1)+1$

$=1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+1+\sin^2(\theta)-2-2\cos(\theta)-2+1=0$

Donc $D\in S$.

c) [CD] est un diamètre de $S\Leftrightarrow CD=2\Leftrightarrow\sqrt{(1+\cos(\theta))^2+0^2+\sin^2(\theta)}=2\Leftrightarrow\cos(\theta)=1\underline{\Rightarrow\theta=0}$.

3) a) Il suffit de vérifier que A et C appartiennent à Q.

b) On a : $d(B,Q)=\dfrac{|2-(-1)+0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}<R\Rightarrow$ Le plan Q coupe S suivant un cercle (𝒞) de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et de centre $H(x,y,z)$ tels que $\begin{cases}\overrightarrow{BH}=\alpha\,\overrightarrow{N_Q}\\ H\in Q\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=-1-\alpha\\ z=\alpha\\ 2x-y+z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=-1-\alpha\\ z=\alpha\\ 2+4\alpha+1+\alpha+\alpha-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=-1-\alpha\\ z=\alpha\\ \alpha=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow H\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right).$$

4) a) On a: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}_P\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{N}_P = 0 \Leftrightarrow (AB)// P_\theta$.

b) $d(B,P_\theta) = \dfrac{|\cos(\theta)\times 1+\sin(\theta)\times 0-\cos(\theta)-1|}{\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}} = 1 = R$ donc P_θ est tangent à S.

Comme $D\in P_\theta$ et $D\in S$ alors P_θ est tangent à S en D.

Exercice n°3: **(Correction)**

1) le coefficient de corrélation linéaire de la série (D,V) est $r = \dfrac{\text{cov}(D,V)}{\sigma(D).\sigma(V)} \approx 0.96$.

Comme $|r| \geq 0.86$ alors il existe un ajustement affine entre D et V.

2) $\Delta : V = aD + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(D,V)}{V(D)} \approx \ldots$ et $b = \overline{V} - a\overline{D} \approx .....$

3) Il suffit de remplacer V par 100 et trouver D.

4) Il suffit de remplacer D par 18 et trouver V.

Exercice n°4: **(correction)**

Le directeur du personnel d'une entreprise constate que, chaque hiver, un nombre important d'employés s'absentent, malades de la grippe. Le médecin de l'entreprise lui assure qu'une personne non vaccinée contre la grippe a 40 % de chances d'attraper la maladie alors qu'une personne vaccinée n'a que 5 % de chances de tomber malade.

Le directeur décide donc de proposer au personnel une vaccination gratuite.

1) V :" l'employé s'est fait vacciner" et G : "l'employé contractera la grippe durant l'hiver".

a) $P(G/V) = 0.05$ et $P(G/\overline{V}) = 0.4$.

b) En utilisant la loi des probabilités totales

$P(G) = P(G/V).P(V) + P(G/\overline{V}).P(\overline{V}) = 0.05P(V) + 0.4P(\overline{V}) = 0.05P(V) + 0.4(1 - P(V)) = 0.4 - 0.35P(V)$.

2) On a: $P(G) < 0.2 \Leftrightarrow 0.4 - 0.35P(V) < 0.2 \Leftrightarrow -0.35P(V) < -0.2 \Leftrightarrow P(V) > \dfrac{0.2}{0.35} \approx 0.57$. Donc le pourcentage minimum de personnes à vacciner pour que moins de 20% des employés aient la grippe cet hiver est égal à 57%.

3) Finalement 80 % du personnel accepte de se faire vacciner $\Leftrightarrow P(V) = 0.8$.

a) $p_1 = P(G) = 0.4 - 0.35P(V) = 0.4 - 0.35 \times 0.8 = 0.4 - 0.35 \times 0.8 = 0.4 - 0.28 = 0.12$.

b) $p_2 = P(V/G) = \dfrac{P(V \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(G/V).P(V)}{P(G)} = \dfrac{0.05 \times 0.8}{0.12} = \dfrac{1}{3}$.

4) a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0.12$.

Loi de probabilité de X est: $P(X=k) = C_{500}^{k}(0.12)^{k}(0.88)^{500-k}$; $k \in \{0,1,2,.......,500\}$

b) Le nombre moyen de personnes qui tomberont malades de la grippe cet hiver = E(X)= $500 \times 0.12 = 60$.

c) Comme Le nombre moyen de personnes qui tomberont malades de la grippe cet hiver est égal à 60, alors le chef du personnel a pris une bonne décision, car sinon il aura plus de 50 personnes malades dans l'entreprise et donc elle ne fonctionnera pas.

Exercice n°5: **(Correction)**

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x)$.

1) $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} < 0$ pour tout $x > 0$

D'où le tableau de variation de g suivant :

x	0		α		+oo
g '(x)			-		
g(x)	+oo	↘	0	↘	-oo

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$

2) a) La fonction g est continue et strictement décroissante, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[) = IR$ .et comme $0 \in IR$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 0$.

$g(1.7) \times g(1.8) < 0$ donc $1.7 < \alpha < 1.8$.

b) Comme $g(\alpha) = 0$ alors $\dfrac{1}{\alpha} - \ln(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

3) signe de g sur $]0,+\infty[$:

* Si $0 < x \le \alpha$ alors $g(x) \ge 0$

* Si $x \ge \alpha$ alors $g(x) \le 0$.

B) Soit les équations différentielles (E): $y' + y = \dfrac{e^{2-x}}{x}$ et (E_0): $y' + y = 0$

1) La solution générale de (E_0) est de la forme $y(x) = \mathrm{k}\, e^{-x}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{IR}$.

2) Soit f (x)= $e^{2-x}.\ln(x)$.On a $\mathrm{f}'(x) = -e^{2-x}\ln(x) + e^{2-x}.\dfrac{1}{x}$ donc $\mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}(x) = \dfrac{e^{2-x}}{x} \Leftrightarrow$ f est une solution de (E).

3) Soit h une fonction définie sur $]0,+\infty[$.

a) h est solution de (E) $\Leftrightarrow \mathrm{h}'(x) + \mathrm{h}(x) = \dfrac{e^{2-x}}{x} \Leftrightarrow \mathrm{h}'(x) + \mathrm{h}(x) = \mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}(x)$

$\Leftrightarrow \mathrm{h}'(x) - \mathrm{f}'(x) + \mathrm{h}(x) - \mathrm{f}(x) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{h}-\mathrm{f})'(x) + (\mathrm{h}-\mathrm{f})(x) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{h}-\mathrm{f})$ est solution de (E_0).

b) On a h est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{h}-\mathrm{f})$ est solution de $(\mathrm{E}_0) \Leftrightarrow \mathrm{h}(x) - \mathrm{f}(x) = \mathrm{k}\, e^{-x}$, $\mathrm{k} \in \mathrm{IR}$

$\Leftrightarrow \mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{k}\, e^{-x}, \mathrm{k} \in \mathrm{IR} \Leftrightarrow \underline{\mathrm{h}(x) = e^{2-x}\ln(x) + \mathrm{k}\, e^{-x}, \mathrm{k} \in \mathrm{IR}}$, c'est la solution générale de (E).

C) Dans cette partie, on va étudier f et tracer sa courbe représentative **(C)** dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On a : $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2-x}.\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x.e^{2-x}.\dfrac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^2.\underbrace{\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)}}_{0}.\underbrace{\dfrac{\ln(x)}{x}}_{0} = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2) Déterminer $\lim_{x\to0^+} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{e^{2-x}}_{e^2}.\underbrace{\ln(x)}_{-\infty} = -\infty$.

droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à (C).

3) a) $\mathrm{f}'(x) = -e^{2-x}\ln(x) + e^{2-x}.\dfrac{1}{x} = e^{2-x}\left(\dfrac{1}{x} - \ln(x)\right) = e^{2-x}.g(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

b) Le signe de f ' est celui de g.

D'ou le tableau de variation de f :

x	0		α		+oo
f '(x)		+	0	-	
f(x)	-oo	↗	f(α)	↘	0

5) On a $\ln(\mathrm{f}(\alpha)) = \ln\left(e^{2-\alpha}\ln(\alpha)\right) = \ln\left(e^{2-\alpha}\right) + \ln(\ln(\alpha)) = 2 - \alpha + \ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 2 - \alpha - \ln(\alpha)$..

6) **<u>Voir figure:</u>**